УДК 338.28

Р. С. Рогулин, П. В. Нечаев, Д. Е. Плешанов
Дальневосточный федеральный университет

КОМПЛЕКСНАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА И ТРАНСПОРТИРОВКИ ПРОДУКЦИИ

Посвящена построению линейной смешано-целочисленной модели, нахождению метода и подбора алгоритма для определения оптимального решения производственно-транспортной задачи. Такую задачу можно отнести к классу нетривиальных комбинаторных задач о принятии решений на предприятии. Содержит модель обобщения трех ранее известных задач линейного программирования: производственной задачи, задачи учета времени, задачи максимального потока. Данная постановка задачи подходит к случаю, когда производство объявляет себя банкротом и пытается произвести из остатков сырья продукцию с целью дальнейшей перепродажи и доставки произведенного товара при условии особенности дорожной системы, максимизации прибыли и минимизации издержек при транспортировке груза. Показано, что такую задачу возможно решать и визуализировать средствами пакета Matlab. Представлены возможные экономические ситуации, когда эта модель могла быть уместна. Рассмотрен ряд возможных модернизаций модели этой задачи.

Максимальный поток, оптимизация времени, производство, линейное программирование, обобщение

Любое предприятие в процессе хозяйственной деятельности стремится к минимизации издержек и максимизации прибыли при ограничениях на ресурсы. При всем многообразии методов оптимизации процессов управления ресурсами предприятий в научной литературе недостаточно представлены единые алгоритмы и модели для нахождения оптимального решения комплексных проблем хозяйственной деятельности предприятия. На любом предприятии существуют следующие основные задачи: задача производства (оптимальный выпуск продукции), транспортная задача, задача максимального потока, задача минимизации времени, задача о размещении центров сбыта (обслуживания), задача распределения людских ресурсов при производстве. Рассмотрим только три из них: задача производства (оптимальный выпуск продукции), минимизации времени, задача максимального потока.

При имеющихся запасах ресурсов и заданных рынком ценах необходимо найти оптимальный объем при дополнительном условии наличия норм затрат ресурсов на производство единицы продукции. Такая задача получила распространение в литературе как производственная задача [1], [2]. Обратим внимание на другую задачу – задачу минимизации времени (при транспортировке груза). Стоит отметить еще одну проблему, которая решена, но также является лишь отдельной маленькой задачей – задача максимального потока [1]. Модель этой задачи посвящена нахождению такого пути, пропускная способность которого была бы максимальной на всем графе дорог.

Для решения каждой из них существуют отдельные модели, но мы предлагаем комплексное решение трех вышеописанных задач.

Сформулируем обобщенную постановку задачи: в каком количестве и какого типа продукцию стоит производить, сколько вывезти продукции из каждого пункта производства (склада) так, чтобы минимизировать время и максимизировать объем вывоза с учетом про-

пускной способности графа (дорог). Такая задача может возникнуть у ряда производств, которые не только могут закрываться по причине банкротства, но и при закрытии предприятия на реконструкцию. Данная задача появилась на лесоперерабатывающем комплексе в процессе закрытия на ремонт производственной части цеха. Ввиду биологической конъюнктуры сырья возникла проблема нереализованных накопленных запасов ресурсов, которые не могут храниться на складе долго, так как состояние сырья может ухудшиться (процесс гниения и др.) и в дальнейшем перестать быть пригодным к переработке и производству.

Все вышеперечисленные задачи сводятся к линейным моделям, что значительно упрощает нахождения оптимального решения [1]. Для решения вышеперечисленных задач используются алгоритмы поиска оптимального решения.

Пусть существует некоторый «рецепт» производства каждого вида товара из исходного вида сырья. Обозначим сам «рецепт» как

$$A = \{A_{ij}\},\ i = 1, \ldots, n_1,\ j = 1, \ldots, m_1, \tag{1}$$

где A_{ij} – это элемент, соответствующий тому, сколько потребуется ресурса i для производства j товара. Пусть также существует граф дорог (матрица смежности) с ее пропускной способностью и обозначим ее как

$$d = \{d_{ij}\},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Также экзогенно задано время для транспортировки товара из пункта i в j, обозначим матрицу временных затрат как

$$T = \{t_{ij}\},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Определим вектор цен реализации товара j как

$$P = \{p_j\},\ j = 1, \ldots, m_1. \tag{4}$$

Для полноты набора данных остается определить количество запасов сырья, обозначим его

$$b = \{b_i\},\ i = 1, \ldots, n_1. \tag{5}$$

Необходимо построить математическую модель, которая бы находила оптимум из соображений минимизации времени прохождения по графу, максимизации прибыли с учетом пропускной способности, норм затрат на производство единицы продукции каждого типа, запасов сырья. Пусть x_{ij} – есть количество товара, перевозимое из пункта i в пункт j.

Сформулируем производственную задачу.

Пусть k_j – есть количество товара j, которое подлежит производству из условия оптимума. Исходя из постановки задачи, нужно максимизировать прибыль. Запишем это [2], [3], [4]:

$$\sum_{i=1}^{m_1} k_j p_j \to \max. \tag{6}$$

Исходя из наличия запасов сырья ограничение примет вид [2], [3]:

$$\sum_{j=1}^{m_1} A_{ij} k_j \le b_i,\ i = 1, \ldots, n_1. \tag{7}$$

Количество продукции может быть только целым значением [2], [3], тогда

$$k_j \in Z^+. \tag{8}$$

Сформулируем задачу максимального потока [6], [7].

Целевая функции примет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \to \max . \tag{9}$$

Пусть существует определенная пропускная способность графа, тогда ограничение на объемы перевозок по графу примет вид [2], [3]:

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., n. \tag{10}$$

Определим объем выходящего потока равным входящему. Это значит, что не существует количества товара, которое бы осталось на промежуточных стадиях перевозки и каждый раз товар будет полностью вывезен [2], [7] ,[8], тогда

$$\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij}; \quad i, j \in I, J , \tag{11}$$

где I, J – множества входных и выходных размеров дуг соответственно.

Определим задачу минимизации времени:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} t_{ij} y_{ij} \to \min , \tag{12}$$

где $y_{ij} \in (0;1)$.

Если решать задачу с ограничениями (7)–(8), (10)–(12), любой алгоритм даст следующее решение: $t_{ij} = 0, \forall i, j$. Тогда необходимо связать (12) с (7)–(8), (10)–(11):

$$y_{ij} \le x_{ij} , \tag{13}$$

$$0 \le x_{ij} \le y_{ij} d_{ij}, i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., n . \tag{14}$$

Ограничения (13), (14) выполняют важную роль в системе ограничений, обеспечивая ей непустое множество решений.

Обозначим задачу F_0:

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} t_{ij} y_{ij} + \sum_{j_1=1}^{m_1} k_{j_2} p_{j_2} \to \max , \tag{15}$$

$$\sum_i x_{ij} = \sum_j x_{ij}; \quad i, j \in I, J , \tag{16}$$

$$y_{ij} \le x_{ij}, i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., n , \tag{17}$$

$$k_{j_2} \in Z^+, \ j_1 = 1, ..., m_1 , \tag{18}$$

$$\sum_{j_1=1}^{m_1} A_{ij_1} k_{j_1} \le b_i, i = 1, ..., n_1 , \tag{19}$$

$$y_{ij} \in (0;1),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij_1} = k_{j_1},\ j_1 = 1, \ldots, m_1, \tag{21}$$

где m – число конечных пунктов потребления; m_1 – типы производимого товара; n – число вершин в графе; n_1 – типы сырья. F_0 является задачей линейного целочисленного программирования.

Подобные задачи часто возникают на любых производственных предприятиях: что производить и в каких объемах, чтобы суммарная прибыль предприятия была максимальна с учетом минимизации временных и денежных издержек.

Задача F_0 решена с помощью пакета Matlab. Ответ получим в виде одномерных массивов X. Размерность $X = r + 2n^2$. Первые r элементов отвечают за количество произведенного товара. Следующие n^2 переменных – объем перевезенной продукции по каждой дуге. Последние n^2 элементов отвечают за значения вспомогательных переменных y. Рассмотрим ее подробнее.

В нашем примере количество пунктов производства r = 4. Пусть M – число вершин графа, тогда $M - r - m$ есть число остальных вершин (перекрестки, склады, перевалочные пункты и т. д.).

Обзор алгоритмов. Существует несколько методов решения таких задач. Среди них можно выделить: Метод Литтла [9], Метод ветвей и границ [10], [11], Генетический алгоритм [12], [1], [13]. Сравнительные характеристики данных алгоритмов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Алгоритм	Признаки сравнения	
	Скорость сходимости	Учитывает ли проблему «Big Data»
Метод Литтла	Высокая	Нет
Метод ветвей и границ	Низкая	Нет
Генетический алгоритм	Низкая	Да

Метод Литтла представляет собой алгоритм отсечений посредством генерации прямых (плоскостей, гиперплоскостей) и введением их в систему ограничений [9]. Метод ветвей и границ представляет собой дерево решений, конечным результатом которой является оптимальное решение [10]. Вышеперечисленные методы являются достаточно быстрыми алгоритмами для задач небольшой выборки. Однако когда речь идет о проблеме более известной в мире как «Big Data», становится очевидным тот факт, что эти два метода не позволяют решить задачу. Однако уже в XXI столетии был разработан генетический алгоритм. Ниже приведена общая схема алгоритма [12]. Данный алгоритм особенно хорош, когда мы говорим о задачах линейного программирования (ЛП). Согласно теории [3], допустимое множество решений, а значит и оптимальное в том числе, есть множество компакт [14] – ограниченное и замкнутое. Как известно, одним из главных минусов этого эвристического алгоритма является тот факт, что существует вероятность нахождения алгоритмом локального минимума и далее застревание в нем. Так как множество допустимых решений является компактом то, очевидно, что за конечное время генетический алгоритм найдет решение линейной задачи, даже если задача будет большой размерности. Сложность этого алгоритма заключается в составлении целевой функции.

Рассмотрим пример.

Пусть даны матрицы норм затрат $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ пропускной способности графа D [15], [4], время для прохождения каждого участка графа T [5], [15] и матрицы цен $P = (4; 9; 10.5; 6.5)$, запасов ресурсов $b = (40; 60; 70; 100)$. Все данные представлены в [15], [4]. На рис. 1 можно увидеть произвольную визуализацию пропускных возможностей матрицы смежности D. Номера вершин – пункты производства, промежуточные пункты, пункты потребления. Веса дуг матрицы D – максимальное число единиц продукции, которое можно провезти по каждой дуге.

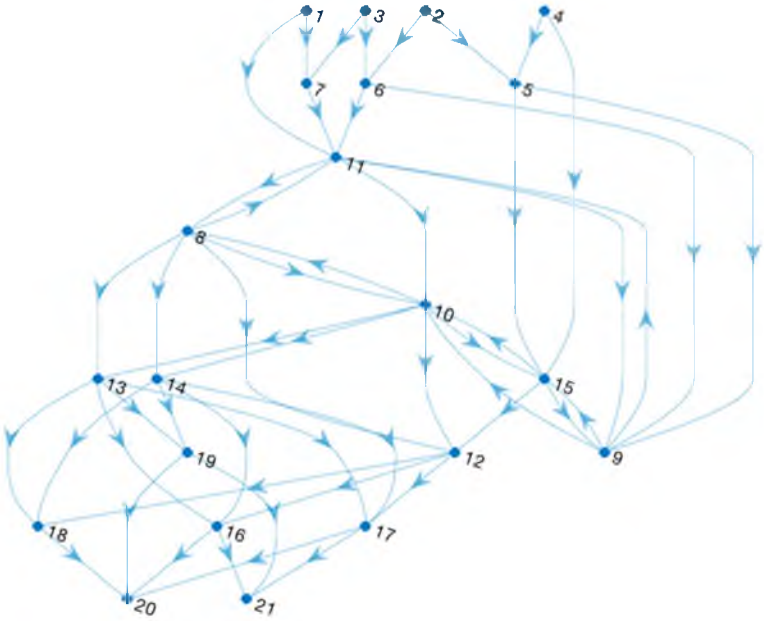

Рис. 1

Решим задачу двумя способами: последовательно [4] и комплексно [15]. На рис. 2, 3 представлены визуализации вектора ответа X решения комплексной и последовательной моделей соответственно.

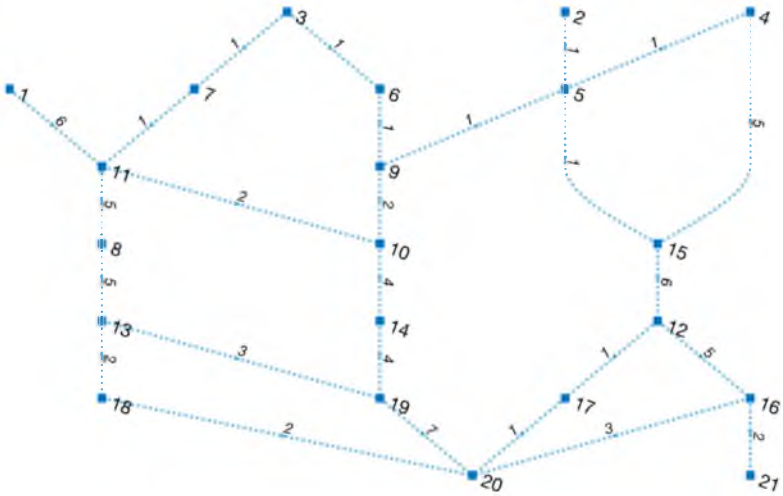

Рис. 2

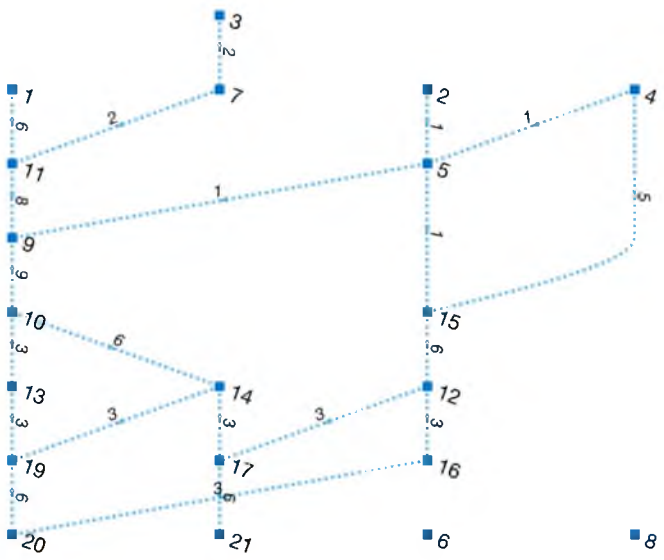

Рис. 3

На рис. 2 и 3 обнаружены «висячие» вершины, которые не вошли в граф решения в соответствии с алгоритмом Литтла.

В табл. 2 представлены для сравнения выходные данные решения поставленной задачи описанными выше методами [15], [4].

Таблица 2

Показатель	Метод решения задачи	
	Последовательно	Комплексно
Объем произведенной продукции (вектор), шт.	(6, 1, 2, 6)	(6, 1, 2, 6)
Суммарные затраты на перевозку по времени, у. е. (13)	888	444
Остатки сырья (вектор), шт.	(8, 0, 1, 2)	(8, 0, 1, 2)
Прибыль, у. е. (16)	–795	–351

Рассмотрим объемы произведенной продукции при решении обоими методами: (6, 1, 2, 6) – решения совпадают. Рассмотрим производственный вектор (6, 1, 2, 6). Из него следует, что первый завод произвел 6 единиц товаров, второй – 1 единицу, третий – 2 единицы, четвертый – 6 единиц. Видим, что суммарное количество товаров равно в обоих случаях 15 единиц.

Суммарные временные издержки на транспортировку при решении рассматриваемыми методами разнятся. Наибольшие издержки у последовательного метода.

Рассмотрим первый вектор запасов ресурсов – (8, 0, 1, 2). Значения этого вектора говорят о том, что первого ресурса осталось 8 единиц, второго – 0, третьего – 1, четвертого – 2. Оба вектора равны.

Рассмотрим прибыль при решении обоими методами. Прибыль больше при решении комплексной модели. Это связано с тем, что комплексная модель дает при решении менее затратный путь.

Рассмотрим вершину 1. На рис. 2 отчетливо видно, как из вершины один выходит следующие дуга: 1→11→10→14→19→20, с соответствующими весами: 6, 2, 4, 4, 7. Тот факт, что вес каждой дуги не одинаков, говорит о том, что в каждой пройденной вершине протекает некоторый процесс, по факту завершения которого, вес дуг может меняться. Такой результат может быть вызван целым рядом экономических факторов: переупаковка контейнеров с последующим изменением его веса, объема, стоимости и пр., слияние в

один поток несколько других потоков и др. Также тот факт, что в матрицах D, T присутствуют такие элементы, что выполняется (на примере матрицы T) $t_{ij} = t_{ji}$, также наталкивает на мысль, что данный алгоритм и его программная реализация могут решать не только задачи на обычных графах, но и на псевдо-графах.

Была рассмотрена одна из возможных постановок задачи, которая обобщает ранее известные три классические задачи линейного программирования. Показано, что такую задачу возможно сформулировать в рамках задачи линейного программирования. Решен пример на 21 вершине с 4 пунктами входа (матрица B), 2 пунктами выхода (матрица A). Показано, что такую задачу возможно решать и визуализировать средствами пакета Matlab. Представлены возможные экономические ситуации, когда эта модель могла быть уместна. Рассмотрен ряд возможных модернизаций модели этой задачи. На примере показано, что решать задачу стоит комплексно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siew Mooi Lim, Abu Bakar Md. Sultan, Md. Nasir Sulaiman, Aida Mustapha, Leong K. Y. Crossover and Mutation Operators of Genetic Algorithms // International J. of Machine Learning and Computing. 2017. Vol. 7, No. 1. P. 9–12.

2. Писарук Н. Н. Исследование операций. Минск: БГУ, 2015.

3. Алексеева Е. В. Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012.

4. PASTEBIN. URL: https://pastebin.com/GpzYPpiP (дата обращения: 11.07.2018).

5. Sumathi P. A new approach to solve linear programming problem with intercept values // J. of Information and Optimization Sciences. 2016. Vol. 37, iss. 4. P. 495–510. DOI: 10.1080/02522667.2014.996031.

6. Daganzo C. F., Smilowitz K. R. Bounds and approximations for the transportation problem of linear programming and other scalable network problems // Transportation Science. 2004. Vol. 38, iss. 3. P. 343–356. DOI: 10.1287/trsc.1030.0037.

7. Gharehbolagh H. H., Hafezalkotob A., Makui A., Raissi S. A cooperative game approach to uncertain decentralized logistic systems subject to network reliability considerations // Kybernetes. 2017. Vol. 46, No. 8. P. 1452–1468.

8. Палий И. А. Введение в линейное программирование: учеб. пособие. Омск: Изд-во СибАДИ, 2007.

9. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. М.: Мир, 1971.

10. Land A. H., Doig A. G. An Automatic Method of Solving discrete Programming Problems // Econometrica. Vol. 28, No. 3. 1960. P. 497–520.

11. Chu W. S., de la Torre F., Cohn J. F., Messinger D. S. A Branch-and-Bound Framework for Unsupervised Common Event Discovery // International J. of Computer Vision. 2017. No 123 (3). P. 372–391. DOI: 10.1007/s11263-017-0989-7.

12. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / пер. с польск. И. Д. Рудинского. 2-е изд. М.: Горячая линия–Телеком, 2008.

13. Du X., Li Z., Xiong W. Flexible Job Shop scheduling problem solving based on genetic algorithm with model constraints // in Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, IEEM Singapore, December 2008. P. 1239–1243.

14. Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. М.: МЦНМО, 2005.

15. PASTEBIN. URL: https://pastebin.com/B4MQ41j9 (дата обращения: 11.07.2018).

R. S. Rogulin, P. V. Nechaev, D. E. Pleshanov
Far Eastern Federal University

INTEGRATED OPTIMIZATION MODEL OF MANUFACTURING AND TRANSPORTATION PROCESSES

This paper is devoted to constructing a linear mixed-integer model, finding a method and selecting an algorithm to determine the optimal solution to the production and transportation problem. This task can be attributed to non-trivial combinatorial problems on decision-making at an enterprise. This article contains a model of generalization of three previously known linear programming problems: production problems, time accounting tasks, and service flow problems. The target setting that integrates all three of the above problems into one, applies to the case when a manufacturing facility declares itself bankrupt and tries to manufacture products from the remains of raw materials for further sale and delivery of the goods produced meeting road system features, maximizing the profit and minimizing carrying costs. It is shown that such a problem can solve and visualize the package Matlab. Possible economic situations are presented where this model could be relevant. A number of possible upgrades to the model of this problem are considered.

Maximum flow, time optimization, production, linear programming, generalization